PROFESOR

prof. Elena Ilieș

COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ ÎN GEOMETRIA PLANĂ

EDITURA MERITOCRAT CLUJ-NAPOCA

ISBN 978-630-6502-80-6

prof. Elena Ilieş

Coliniaritate și concurență în geometria plană

EDITURA MERITOCRAT CLUJ-NAPOCA
2022

Consilier editorial: lect. dr. Tiberiu Irimia
Lector de carte: ing. drd. Paula Mândrean
Tehnoredactare: prof. Elena Ilieş
Coperta I-IV: prof. Alexandru Georgiu
Corectura: prof. Elena Ilieş
Grafică generală: prof. Alexandru Georgiu

Editura Meritocrat Cluj-Napoca
Tel. 0760 607 889, 0741 494 338
e-mail: meritocratcj@gmail.com

Responsabilitatea calității corecturii textului din această carte aparține autorului.

COLINIARITATE ŞI CONCURENŢĂ ÎN PROGRAMELE ŞCOLARE

Prin predarea geometriei în şcoala gimnazială şi în liceu, se urmăreşte ca elevii să-şi însuşească un număr de cunoştinţe matematice, cu precădere cele din programa şcolară, dar nu numai. În mod deosebit, geometria este chemată să dezvolte gândirea, mai ales gândirea vie, activă şi complexă, capacitatea de a analiza şi generaliza, de a extrage esenţialul, de a deprinde legăturile raţionale dintre elemente, de a dezvolta iniţiativa personală şi în gândire.

În însuşirea de cunoştinţe se urmăreşte ca toate noţiunile şi conceptele dobândite să devină pentru elevi bunuri proprii, instrumente de lucru, nu numai să fie reţinute pur şi simplu.

De aceea, scopul instructiv se împleteşte strâns cu cel educativ, cu activitatea concretă, practică.

Este necesar ca predarea geometriei să se facă astfel încât în liceu studiul ei să se poată baza pe cunoştinţele acumulate în şcoala gimnazială. Dacă nu se asigură existenţa acestor punţi de legătură între ciclurile şcolare, predarea este îngreunată şi ignoră ceea ce elevii au învăţat anterior.

În geometria elementară, rezolvarea problemelor de coliniaritate a unor puncte sau de concurenţă a unor drepte, continuă să reprezinte o constantă în procesul rezolvării unor probleme de larg interes aplicativ, folosind metode şi principii matematice.

După P.P.Neveanu „problema apare ca un obstacol cognitiv în relaţiile dintre subiect şi lumea sa, iar asumarea sarcinii de a depăşi obstacolul, precum şi demersurile cognitive şi tehnice întreprinse în acest scop, conturează domeniul rezolvării problemelor".

Plasându-se în spaţiul didactic, putem afirma că pentru rezolvarea unei probleme, elevul trebuie să fie capabil să-şi actualizeze acele reguli învăţate anterior pe care combinându-le după o strategie, ajunge independent la o nouă idee, o regulă de ordin superior, ceea ce înseamnă de altfel că elevul rezolvă o problemă.

După Okon, trebuie să considerăm drept problemă „orice dificultate teoretică sau practică a cărei soluţionare reprezintă rezultatul unei activităţi proprii de cercetare a elevului prin care, conducându-se după anumite reguli, tinde să învingă dificultatea respectivă şi prin aceasta dobândeşte noi cunoştinţe şi experienţă".

Problemele constituie motivul, mijlocul şi scopul învăţării matematice şcolare.

Motivul: acesta suscită curiozitatea elevilor şi impun acomodări ce ajută la rezolvări.

Mijlocul: studiul excesiv al teoriei nu poate certifica în ce măsură aceasta a fost însuşită creativ.

Scopul: majoritatea elevilor învaţă matematica spre a avea rezultate bune la examene în care rezolvarea problemelor este prioritară, adesea exclusivă.

În faţa unei situaţii problemă, rezolvitorul trăieşte două realităţi: una de ordin cognitiv, referitor la experienţa trecută pe care şi-o reactualizează şi alta de ordin motivaţional ce rezultă pe baza elementului surpriză, de noutate şi necunoscut cu care se confruntă acesta.

Exemple tipice de situaţii problemă întâlnite la geometrie sunt problemele de coliniaritate şi concurenţă.

Metoda problematizării

Metoda de învăţare prin problematizare este o metodă din clasa celor activ-participative care antrenează elevul în învăţarea prin punerea şi rezolvarea de probleme.

Prin această metodă, profesorul utilizează un mod de adresare interogativ prin expresii de tipul: „ ce s-ar întâmpla dacă…?"; „cum ar arăta formula… în cazul…?"; „ în ce condiţii punctele M şi N sunt coliniare…?" în comparaţie cu cel indicativ sau imperativ utilizat cu precădere în cazul metodelor expozitive: „arătaţi că …!"; „să se afle… ştiind că…" ; „calculaţi în mod asemănător…!" etc.

După Okon, predarea problematizată presupune următoarele activităţi - etape:

- organizarea situaţiilor problematice; (1)
- formularea problemelor (treptat sunt atraşi în acest proces elevii înşişi); (2)
- acordarea ajutorului indispensabil elevilor în rezolvarea problemelor şi verificarea soluţiilor; (3)
- coordonarea procesului de sistematizare şi fixare a cunoştinţelor astfel dobândite; (4).

Tot Okon afirmă că „ mult mai favorabilă decât învăţarea bazată pe transmitere (în care elevii îşi însuşesc cunoştinţele, organizate într-un sistem în care sunt date toate elementele componente şi legăturile între ele), este cea în care elevului îi revine sarcina de a descoperi elementele sau legăturile care lipsesc şi de a îmbina elementele date astfel încât să apară noi asociaţii.

Descoperirea

Rezolvarea de probleme ca metodă de învăţare îi cere elevului să descopere regula de ordin superior fără vreun ajutor special. Uneori sunt utilizate şi metode expozitive, prin care se expune pur şi simplu soluţia problemei puse. Deşi s-a constatat că imediat după perioada de învăţare, metoda expozitivă a avut ca rezultat o actualizare mai bună a regulilor învăţate, totuşi cercetările făcute, au arătat că însuşirea unei reguli de ordin superior pe calea descoperirii (prin învăţarea problematizată, învăţarea prin descoperire) generează o capacitate deosebit de eficace care se păstrează bine pe mari perioade de timp.

Rezolvarea de probleme sau descoperirea reprezintă numai pasul final într-o succesiune de învăţare care, privită din urmă, trece prin mai multe momente de învăţare care se preced unul pe altul.

În întreg procesul de rezolvare a unei probleme nu se poate face o demarcaţie strictă în ceea ce priveşte utilizarea metodelor de tip algoritmic şi respectiv euristic, ele completându-se reciproc.

Metode şi procedee euristice în rezolvarea problemelor

Prin metodă euristică înţelegem, în mare, o cale specifică de rezolvare a unei probleme, cu caracter general (aplicabilă mai multor situaţii problematice); ea poate include în structura ei mai multe procedee, care se constituie ca detalii ale acesteia, sfera lor de aplicabilitate fiind mai limitată. În unele situaţii, cele două noţiuni (metodă, procedeu) se consideră sinonime.

1) **Analogia** înseamnă o asemănare între două sau mai multe situaţii, noţiuni, configuraţii (geometrice), etc. Metoda analogiei porneşte de la asemănări exterioare ce există între sisteme de elemente (configuraţii geometrice) pe baza cărora se fac asociaţii, se emit ipoteze noi, se fac comparări între elemente şi relaţii dintre ele.

O formă a analogiei este ***raţionamentul prin modele***, operaţia de construire a unui model şi de utilizare a lui în învăţare poartă numele de modelare. În instruirea la geometrie sunt esenţiale modelele figurative ale proprietăţilor geometrice, ale problemelor, ale strategiilor rezolutive.

Gândirea prin modele este aspectul cel mai general al oricărei gândiri creatoare. „Dacă între două sisteme (s) şi (s’) există o corespondenţă biunivocă spunem că (s) este un model al lui (s’) şi reciproc.

Problema care se pune din punct de vedere metodic constă tocmai în formarea şi dezvoltarea capacităţii de sesizare a analogiilor. Această metodă este utilizată atât în însuşirea noţiunilor cât şi în învăţarea unor noi reguli, şi nu în ultimul rând în rezolvarea problemelor.

2) **Generalizarea şi particularizarea**

Generalizarea aşa cum este ea folosită în probleme, constă în trecerea de la o mulţime A de obiecte la o altă mulţime B, astfel încât $B \supset A$. Astfel rezolvarea unei probleme P_2 este facilitată de rezolvarea unei probleme P_1 mai generală, dar mai uşor de soluţionat.

Prin particularizare trecem de la o mulţime B la o altă mulţime A cu $A \subset B$ sau la un singur element din B. Rezolvând mai întâi o problemă înrudită particulară, putem descoperi observaţii utile pentru propoziţia din cazul general.

3) **Analiza şi sinteza**

Metoda analitică (sau a analizei) se mai numeşte şi metoda reluării problemei de la sfârşit la început a cărei primă descriere se datorează marelui geometru al antichităţii Pappus.

Analiza este o metodă prin care o proprietate necunoscută sau nedovedită (o concluzie, un principiu al unei construcţii) implică o altă proprietate, care la rândul ei antrenează o altă proprietate intermediară şi până la urmă printr-o înlănţuire de echivalenţe se ajunge la o relaţie cunoscută sau adevărată.

Sinteza este metoda prin care pornind de la propoziţia cunoscută (datele problemei) se deduc alte propoziţii adevărate care în final demonstrează concluzia problemei.

În metoda analizei şi metoda sintezei, intuiţia, raţionamentul euristic funcţionează după principiul demonstraţiei prin implicaţie sau echivalenţă.

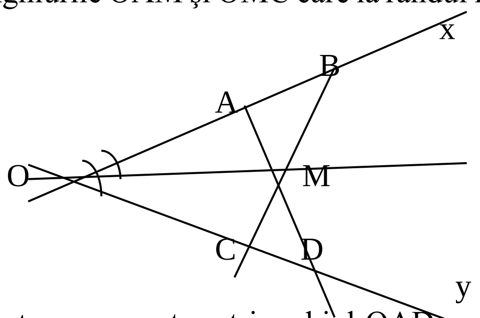
I, $I \to P$, $P \to Q$, $Q \to C$ deci $I \to C$ prin implicaţie.

C, $C \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow I$ deci $I \leftrightarrow C$ prin echivalenţă.

Exemplu:

Pe laturile unui unghi ∡XOY se iau punctele A şi B pe OX şi C şi D pe OY astfel încât OA=OC şi OB=OD. Să se demonstreze că dreptele AD, BC şi bisectoarea unghiului ∡XOY sunt concurente.

Analiza: Fie ∡XOY şi punctele A,B, C, D şi M punctul de intersecţie a dreptelor AD şi BC. Vom analiza unghiurile ∡AOM şi ∡MOC. Deducem că aceste unghiuri sunt congruente, deoarece fac parte din triunghiurile OAM şi OMC care la rândul lor sunt triunghiuri congruente.



a) Triunghiul OBC este congruent cu triunghiul OAD pentru că: OB=OD, OC=OA din ipoteză şi unghiurile ∡AOC şi ∡BOC sunt congruente ca unghiuri comune. Rezultă că unghiurile ∡OBC şi ∡ADO sunt congruente, unghiurile ∡OCB şi ∡OAD sunt congruente, deci unghiurile ∡BCD şi ∡BAD sunt congruente.

b) Triunghiurile AMB şi CMD sunt congruente pentru că AB=CD, unghiurile ∡AOC şi ∡BOC sunt congruente, unghiurile ∡OBC şi ∡ADO sunt congruente, rezultă deci că MA=MC.

c) Triunghiurile OAM şi OMC sunt congruente pentru că OM=OM, OA=OC, MA=MC. Rezultă că unghiurile $\measuredangle$AOM şi $\measuredangle$MOC sunt congruente, deci punctul M este pe bisectoarea unghiului $\measuredangle$XOY. Rezultă că cele trei drepte sunt concurente.

Sub aspect metodic pentru a înţelege mai bine cele două metode, a analizei şi a sintezei – cele mai des întrebuinţate în rezolvarea problemelor se recomandă elevilor o listă de instrucţiuni care au rolul de a orienta rezolvitorul spre alegerea procedeelor euristice care să dirijeze căutarea şi găsirea soluţiei.

<table>
<tr><td>I. Metoda analizei</td><td>Metoda sintezei</td></tr>
<tr><td>pornim de la concluzie spre ipoteză.</td><td>pornim de la ipoteză spre concluzie.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Care este ipoteza? Care este concluzia? Să facem un desen! Să introducem notaţii! Să separăm diverse părţi ale ipotezei şi să le scriem în limbaj matematic! Am mai întâlnit această problemă? Cunoaştem vreo problemă înrudită cu aceasta? Cunoaştem vreo teoremă care ar putea fi utilă aici? Ce ne spune figura geometrică?</td></tr>
<tr><td>II. Să cercetăm concluzia!</td><td>Să cercetăm ipoteza!</td></tr>
<tr><td>Să ne gândim la o problemă cunoscută având concluzie sau una similară!
Să reformulăm problema, concluzia!
Să reluăm problema de la sfârşit spre început (deci să admitem concluzia ca dovedită).
Să cercetăm din ce propoziţie (P) am putea deduce concluzia!</td><td>Să ne gândim la o problemă având aceeaşi ipoteză sau una similară!
Am putea deduce ceva util din ipoteză?
Să reţinem numai o parte a ipotezei, omiţând restul!
Mai rămâne concluzia adevărată?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Să încadrăm elementele necunoscute în ansamblul figurii.
Să revenim la definiţii!</td></tr>
<tr><td>Am putea modifica concluzia?</td><td>Am putea modifica ipoteza?</td></tr>
<tr><td colspan="2">astfel ca legătura dintre noua concluzie ⁄ noua ipoteză să fie mai strânsă?</td></tr>
<tr><td>Să căutăm din nou, din ce anume se poate deduce propoziţia P!</td><td>A fost utilizată întreaga ipoteză?
Ne-am putea imagina şi alte premise din care putem deduce concluzia?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dacă nu putem rezolva problema dată, încercăm să rezolvăm mai întâi o problemă înrudită, sau una auxiliară.
Ştim să rezolvăm o parte a problemei date? Să recurgem la analogii.
Dacă am rezolvat unele părţi din problemă, să le combinăm pentru a realiza planul soluţiei etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">III) Dacă am ajuns la un plan al soluţiei sa-l verificăm pas cu pas.
Ne putem da seama dacă planul este corect?
Putem demonstra dacă este corect?
IV) Se poate verifica dacă argumentarea este corectă?
Se poate obţine adevărul concluziei (C) şi pe altă cale?
Se poate folosi concluzia sau metoda de demonstraţie (strategia) la o altă problemă?
Vă puteţi imagina o astfel de problemă?</td></tr>
</table>

<u>Categorii de probleme</u>

După gradul lor de structurare, problemele pot fi clasificate în probleme bine definite şi probleme slab definite. În timp ce problemele bine definite se pot rezolva prin algoritmi, cele cu o redusă cotă de specificitate necesită în rezolvare strategii şi procedee euristice.

Rietman propune în 1966 o împărţire a problemelor în cinci categorii:

a) Probleme reproductiv – noncreative; necesită o gândire reproductivă. În această categorie sunt cuprinse o mare parte din problemele prevăzute în programa şcolară, probleme – exerciţii care în geometrie vizează calculul măsurilor de distanţe şi unghiuri, arii şi volume, sau aplicarea directă a unor teoreme şi definiţii.

b) Probleme demonstrativ – explicative sunt probleme pentru care, într-o primă etapă, rezolvarea constă în analiza stării finale. Cu această categorie se acoperă aproape întreaga arie a problemelor care se rezolvă în şcoală, aşa numitele probleme de demonstrat, care în geometrie ocupă locul central.

c) Probleme inventiv – creative întâlnite în matematica şcolară, la nivel de olimpiade, exemplele întâlnite în geometria şcolară fiind problemele de coliniaritate, probleme de concurenţă, care sunt reprezentative pentru această categorie fiind prevăzute şi de programa şcolară, fără însă a acoperi totul. Ele se deosebesc de cele euristic – creative prin înalta specificare a stării iniţiale.

d) Probleme euristic – creative, care reclamă în cel mai înalt grad capacităţile cognitiv – euristic – creative, rezolvarea lor presupunând explorare , inspiraţie, invenţie; sunt problemele prin care se obţin noi proprietăţi, se pun în evidenţă noile relaţii.

e) De multe ori este indicat să căutăm mai multe soluţii la o problemă.

Etapele rezolvării unei probleme

Spre deosebire de exerciţii , care constau în aplicarea directă a noţiunilor teoretice învăţate, rezolvarea unei probleme necesită imaginaţia matematică, gândirea creatoare şi ingeniozitatea elevilor. În vederea rezolvării unei probleme trebuie să ţinem cont de următorii paşi:

Înţelegerea problemei. Întrebările care trebuie să le formulăm în această primă etapă sunt: Care este necunoscuta? Care sunt datele? Care este condiţia? Trebuie să facem un desen? Care sunt noutăţile corespunzătoare?

Întocmirea planului (construirea modelului matematic)

Am învăţat vreo teoremă care ar putea fi aplicată aici? Cunoaştem vreo problemă asemănătoare căreia am putea să-i folosim metoda de rezolvare? Am putea să o reformulăm? Au fost utilizate toate datele problemei?

Enunţăm relaţiile dintre date şi cunoscute. Aceste date pot fi egalităţi, inegalităţi sau de lată formă şi care vor forma astfel **modelul matematic al problemei.**

Rezolvarea modelului matematic

Transformăm elementele care ni se dau şi cele necunoscute, introducem elemente noi, mai apropiate de datele problemei. Generalizăm, examinăm cazurile generale şi aplicăm analogii.

Verificarea soluţiei găsite

Se interpretează datele obţinute. Se aleg soluţiile practice. Verificăm dacă nu există o altă cale mai directă care să ne ducă la acelaşi rezultat. Se consemnează soluţiile găsite şi schema rezolvării unei probleme a luat sfârşit.

Dacă problema cercetării fundamentale într-un domeniu este desigur foarte importantă, la fel de preocupantă trebuie să rămână problema transmiterii elevilor conţinutului acelui domeniu.

Este cunoscut faptul că de modul în care le sunt îndrumaţi elevilor primii paşi, depinde în mare măsură viitoarea lor atitudine faţă de studiul geometriei. Una din căile de înlăturare a eşecului este abordarea geometriei pornind de la problemele practice, întâlnite de elevi, de la diverse probleme plane sau spaţiale care prezintă interes, începând cu cele mai simple care să-i pună în evidenţă proprietăţile studiate sau cunoştinţele cele mai recent asimilate şi continuând cu probleme dificile care să le solicite din plin, nu numai atenţia, dar şi gândirea creatoare, imaginaţia şi ingeniozitatea.

Definiţiile, teoremele şi problemele propuse trebuie să fie abordate cât mai simplu şi clar, să se bazeze pe cunoştinţele deja asimilate, dând fiecărui elev posibilitatea de înţelegere. Desenul corect şi iniţierea în executarea lui de către elevi prin formarea de deprinderi de muncă independentă cu rigla şi compasul, este o condiţie de bază în rezolvarea oricărei probleme, împreună cu relaţiile şi legăturile dintre algoritmii de calcul abordaţi în rezolavrea sau demonstrarea oricărui adevăr geometric.

Redactarea soluţiilor problemelor şi a demonstraţiilor problemelor, justificarea afirmaţiilor şi a deducţiilor făcute sunt condiţii absolut necesare.

În cadrul matematicii, considerată de un număr mare de elevi ca o disciplină aridă şi lipsită de aplicaţii imediate, cercetarea şi legarea de diferite aspecte practice se impune ca fiind necesară în fiecare lecţie.

Rolul învăţământului matematic nu este de a furniza elevilor o ştiinţă gata făcută, cât de a constitui o iniţiere în organizarea unui domeniu prin mijloace matematice pe baza prezenţei momentelor de reinventare a materiei de învăţat, precum şi punerea în evidenţă a legăturilor, conexiunilor dintre cunoştinţele predate, prezentate sau observate de elevi în viaţa practică.

Problemele de coliniaritate şi problemele de concurenţă sunt probleme inventiv – creative fiind prevăzute şi în programa şcolară. Deoarece în programele şcolare a claselor de gimnaziu sunt prevăzute puţine teme de coliniaritate (poziţii relative ale unui punct faţă de o dreaptă: puncte coliniare) respectiv de concurenţă (poziţii relative a două drepte: drepte secante sau concurente, drepte paralele), unele probleme de coliniaritate „ mai consistente” nu pot fi rezolvate decât în cadrul unor activităţi suplimentare cum ar fi: opţional de aprofundare sau în activitatea didactică din centrele de excelenţă.

Problemele de coliniaritate şi concurenţă se regăsesc în programele şcolare de gimnaziu şi liceu, începând cu clasa a VI-a, la capitolul de geometrie, când sunt introduse noţiunile de dreaptă, semidreaptă, unghiuri, triunghiuri congruente, paralelism şi perpendicularitate, linii importante într-un triunghi (bisectoare, înălţime, mediană şi mediatoare). În cadrul acestor teme, profesorul urmăreşte să dezvolte la elevi metode fundamentale precum analiza, comparaţia, sinteza şi generalizarea, metode ce vor fi folosite mai târziu la demonstrarea coliniarităţii unor puncte, la demonstrarea concurenţei unor drepte (concurenţa înălţimilor şi a medianelor fiind acceptată fără demonstraţie în clasa a VI-a, deoarece implică noţiuni care se studiază doar în clasa a VII-a). În cadrul acestor teme, elevul trebuie să îmbine diferite ipoteze, iar prin raţionamente logice să descopere soluţia, realizându-se în acest sens o unitate între formativ şi informativ.

În programa de clasa a VI-a, problemele de coliniaritate şi concurenţă, apar în cadrul capitolelor: „Dreapta” , „ Perpendicularitate în plan” şi „ Proprietăţi ale triunghiurilor” putând fi abordate la temele:

1. Poziţii relative ale unui punct faţă de o dreaptă: puncte coliniare;
2. Poziţii relative a două drepte;
3. Bisectoarea unui unghi: concurenţa bisectoarelor;
4. Mediatoarea unui segment: concurenţa mediatoarelor;
5. Înălţimea în triunghi: concurenţa înălţimilor;
6. Mediana într-un triunghi: concurenţa medianelor.

Competenţele specifice urmărite în abordarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă pot fi următoarele:

1. Stabilirea coliniarităţii unor puncte.
2. Verificarea faptului că două sau mai multe drepte sunt sau nu concurente.
3. Verificarea concurenţei liniilor importante într-un triunghi.

4. Alegerea reprezentărilor geometrice potrivite în vederea efectuării calculului de lungimi de lungimi de laturi sau măsuri de unghiuri ce intervin.
5. Interpretarea informaţiilor conţinute în reprezentări geometrice în corelaţie cu determinarea unor lungimi de segmente şi a unor măsuri de unghiuri.

Dacă problemele de coliniaritate şi concurenţă apar în mod explicit în programa de clasa a VI-a, în programa de clasa a VII-a ele nu se regăsesc sub forma unor teme, ci se pot regăsi în cadrul unor lecţii de consolidare şi recapitulare la o anumită temă. De exemplu la sfârşitul unităţii de învăţare „ Asemănarea triunghiurilor”, se poate prezenta ca aplicaţie: Teorema lui Menelaus şi Teorema lui Ceva. Elevii de clasa a VII-a trebuie să stăpânească deja metodele de rezolvare a problemelor de geometrie.

Tematica problemelor de coliniaritate şi concurenţă se reia în clasa a IX-a în cadrul capitolului „ Paralelism, coliniaritate şi concurenţă în geometria plană”.

Există probleme de matematică, uneori chiar în manuale care pot conduce la generalizări inaccesibile întregii mase de elevi, la particularizări interesante şi pentru care uneori la clasă nu există timp suficient pentru a le comenta mai amplu. Ţinând cont de toate aceste situaţii se impune elaborarea unei programe de opţional de aprofundare, care să cuprindă şi probleme de coliniaritate şi concurenţă care să se adreseze acelor elevi motivaţi şi capabili de performanţă.

Opţionalul de aprofundare, este acel tip de curriculum la decizia şcolii (CDŞ) derivat dintr-o disciplină studiată în trunchiul comun, care urmăreşte aprofundarea obiectivelor de referinţă/competenţelor specifice curriculum-nucleu prin noi unităţi de conţinut. Pentru anumite competenţe specifice menţionate în programa de trunchi comun se pot proiecta conţinuturi noi care vor conduce la aprofundarea competenţelor respective.

Obiectivele cadru sau competenţele generale în cazul opţionalului de aprofundare sunt aceleaşi ca în programa de trunchi comun:

I. Cunoaşterea şi înţelegerea conceptelor , a terminologiei şi a procedurilor de calcul specifice matematicii.

II. Dezvoltarea capacităţii de explorare/investigare şi rezolvare de probleme.

III. Dezvoltarea capacităţii de a comunica utilizând limbajul matematic.

IV. Dezvoltarea interesului şi a motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate.

Ca obiective de referinţă fixate în programa opţionalului de aprofundare, considerăm următoarele:

O_1: - să recunoască şi să utilizeze proprietăţi ale figurilor geometrice.

O_2: - să utilizeze proprietăţi calitative şi matrice ale figurilor geometrice în rezolvarea unei probleme.

O_3: - să formuleze cât mai multe consecinţe posibile, care decurg dintr-un set de ipoteze date; să construiască generalizări şi să investigheze valoarea de adevăr a unor enunţuri.

O_4: - să construiască probleme, pornind de la un model (grafic sau formulă).

O_5: - să identifice şi să diferenţieze etapele unui raţionament matematic prezentat în diferite forme.

O_6: - să argumenteze logic în cadrul unui grup, idei şi metode matematice, să utilizeze diferite surse de informaţie în verificarea şi susţinerea opiniilor.

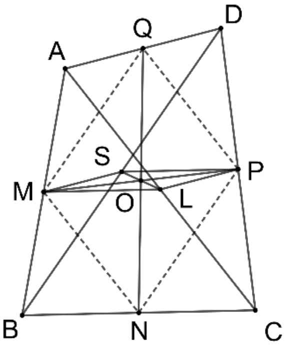
O_7: - să manifeste perseverenţă şi interes pentru găsirea de soluţii noi în rezolvarea unor probleme.

O_8: - să manifeste interes pentru folosirea tehnologiilor informaţiei în studiul matematicii.

V.1.1. Metode alternative de rezolvare a problemelor de coliniaritate

Problema 1

Să se arate că, în orice patrulater convex, mijloacele diagonalelor şi punctul de intersecţie a dreptelor determinate de mijloacele laturilor opuse sunt coliniare



Soluţia 1 (metoda raţionamentului geometric)

Se ştie că MNPQ paralelogram, deci O este mijlocul lui MP.

MS este linie mijlocie în ΔBAD, deci MS∥AD şi $MS=\frac{1}{2}AD$. LP este linie mijlocie în ΔCAD, deci LP∥AD şi $LP=\frac{1}{2}AD$. Astfel am dovedit că MS∥LP şi MS≡LP, adică MSPL este paralelogram şi, cum O este mijlocul lui MP, ele va fi şi mijlocul lui SL; prin urmare, punctele S, O, L sunt coliniare.

Soluţia 2 (metoda coordonatelor)

Considerăm un sistem de axe de coordonate şi notând coordonatele lui M cu x_M şi y_M, vom avea:

$x_O = \frac{1}{2}(x_M + x_P) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_A + x_B) + \frac{1}{2}(x_C + x_D)\right] = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D)$ ş, la fel,
$y_O = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D)$; $x_S = \frac{1}{2}(x_B + x_D)$, $x_L = \frac{1}{2}(x_A + x_C)$, $y_S = \frac{1}{2}(y_B + y_C)$,
$y_L = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$. De aici putem merge pe două căi:

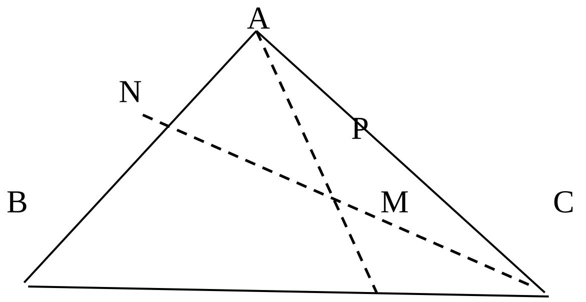
A. Mijlocul lui LS are coordonatele: $\frac{1}{2}(x_L + x_S) = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D)$ şi $\frac{1}{2}(y_L + y_S) = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D)$, deci mijlocul lui LS este punctul O, prin urmare punctele S, O, L sunt coliniare.

B. $$\begin{vmatrix} x_O & y_O & 1 \\ x_L & y_L & 1 \\ x_S & y_S & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) & \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_A + x_C) & \frac{1}{2}(y_A + y_C) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_B + x_D) & \frac{1}{2}(y_B + y_D) & 1 \end{vmatrix}$$

Scăzând prima linie din celelalte două, acestea devin egale în modul, deci determinantul este nul. Astfel, punctele S, O, L sunt coliniare.

Problema 2

Fie un triunghi ABC şi punctul $M \in [BC]$ astfel încât BC=3MC. Fie N, P mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CN]$. Arătaţi că punctele A, P, M sunt coliniare.



Soluţia 1 (metoda raţionamentului geometric)

Din BC=3MC rezultă BM=2MC. Avem $\frac{AN}{AB}=\frac{1}{2}$; $\frac{MB}{MC}$=2 şi $\frac{PC}{PN}=1$ deci $\frac{AN}{AB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{PC}{PN}=1$. Conform teoremei lui Menelaus rezultă că A, P, M sunt coliniare.

Soluţia 2 (metoda vectorială)

Vom arăta că există α∈ℝ, astfel încât $\overrightarrow{AP}$=$\alpha\overrightarrow{MP}$. În acest scop vom exprima $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{MP}$ în funcţie de doi vectori necoliniari din configuraţie, de exemplu $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

Cum PN=PC, avem $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Avem

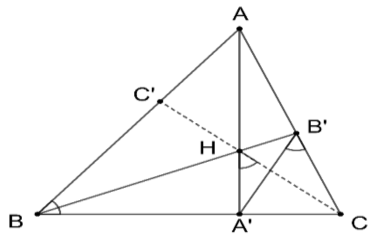
$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CP}$=$\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$+$\frac{1}{2}\overrightarrow{CN}$=$\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$+$\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$. Înlocuind $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$, obţinem: $\overrightarrow{MP}=-\frac{1}{6}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. Prin urmare, $2\overrightarrow{AP}=-6\overrightarrow{MP}$, deci $\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{MP}$. În concluzie, punctele A, P, M sunt coliniare.

V.1.2. Metode alternative de rezolvare a problemelor de concurenţă

Problema 1

Să se arate că înălţimile unui triunghi sunt concurente.



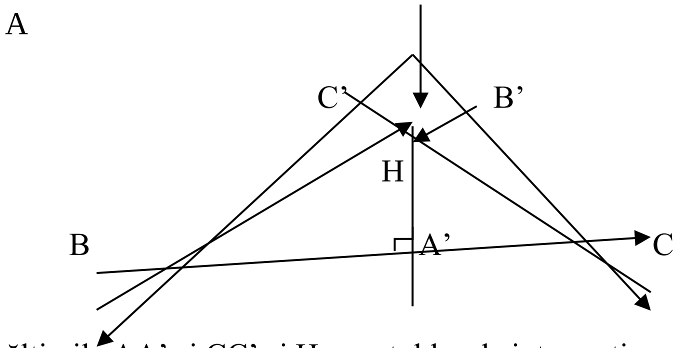
Soluţia 1 (metoda raţionamentului geometric)

Fie AA', BB', CC' înălţimile unui triunghi ABC. Presupunem că AA'∩BB'=H şi ne propunem să arătăm că CH⊥AB.

Patrulaterul AB'A'B este inscriptibil pentru că diagonalele lui formează unghiuri drepte, deci congruente, cu laturile opuse. Deducem ∡ABC≡∡CB'A' (un unghi al patrulaterului este congruent cu unghiul exterior).

Patrulaterul CB'HA' este şi el inscriptibil pentru că are unghiuri opuse drepte, deci suplementare. De aici ∡CB'A'≡∡CHA' ca unghiuri formate de diagonale cu laturile opuse. Avem ∡CHA'+∡HCA'=90° sau ∡ABC+∡C'CB=90°, deci CH⊥AB şi astfel H∈CC', înălţimea din C.

Soluţia 2 (metoda vectorială)



Fie înălţimile AA' şi CC' şi H punctul lor de intersecţie; notăm B'=BH∩AC şi să arătăm că BB'⊥AC. Din $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}$ (1). Din AA'⊥BC, CC'⊥AB obţinem $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BC}$=0 şi $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ sau, cu (1), $\overrightarrow{HA}\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}\right)=0, \overrightarrow{HC}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)=0$.

Desfacem parantezele şi obţinem:

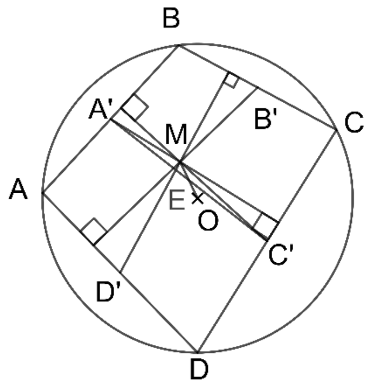
$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}=0$$

$$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}=0 \qquad +$$

$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HC}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA}\right)+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}=0$ şi cum $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HA}=0$, avem $\overrightarrow{HB}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=0$ sau $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, de unde HB⊥AC, ceea ce arată concurenţa.

Problema 2

Fie un patrulater inscriptibil ABCD şi considerăm mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ca fiind punctele A', B', C', D'. Să se arate că perpendicularele din A' pe CD, din C' pe AB şi din D' pe BC sunt concurente, punctul lor de intersecţie numindu-se *punctul lui Mathot*.



Soluţia 1 (metoda raţionamentului geometric)

Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului inscriptibil ABCD. Deoarece punctul O se află pe mediatoarele laturilor patrulaterului, rezultă că:

OA'⊥AB, OB'⊥BC, OC'⊥CD, OD'⊥AD.

Bimedianele patrulaterului sunt concurente într-un punct E. Fie M simetricul lui O faţă de E. Patrulaterul MA'OC' este paralelogram deoarece diagonalele se înjumătăţesc. Rezultă MA'∥OC'. Deoarece OC'⊥CD, rezultă că MA'⊥CD. Analog se arată că MB'⊥AD, MC'⊥AB şi MD'⊥BC. Prin urmare perpendicularele duse din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sunt concurente în punctul M.

Soluţia 2 (metoda vectorială)

Fie O centrul cercului circumscris lui ABCD, M intersecţia perpendicularelor din E pe CD şi din F pe AB, iar N intersecţia perpendicularelor din G pe AD şi din H pe BC. Astfel OEMF şi OGNH sunt paralelograme, deci:

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$,

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$.

Rezultă că $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ şi M=N.

Propun, în continuare, câteva planuri de lecţie legate de tema lucrării. Lecţiile sunt de diferite tipuri care succed un şir de lecţii în care elevii şi-au însuşit etapele de rezolvare a unor probleme de coliniaritate şi concurenţă.

Proiect de lecţie nr. 1

TEMA: Dreapta

TIPUL LECTIEI: Lecţie de sistematizare şi fixare a cunoştinţelor

COMPETENŢE SPECIFICE:

- CG1-7 Recunoaşterea şi descrierea unor figuri geometrice plane în configuraţii date
- CG3-5 Utilizarea proprietăţilor referitoare la drepte pentru calcularea unor lungimi de segmente
- CG4-5 Exprimarea prin reprezentări geometrice a noţiunilor legate de drepte
- CG5-5 Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente
- CG6-5 Interpretarea informaţilor conţinute în reprezentări geometrice în corelaţie cu determinarea unor lungimi de segmente

OBIECTIVE OPERATIONALE:

a) **COGNITIVE**:

1. să recunoască, să descrie şi să numească figuri geometrice plane în configuraţii geometrice simple
2. să utilizeze proprietăţi simple ale figurilor geometrice în contexte uzuale sau matematice
3. să investigheze valoarea de adevăr a unei afirmaţii utilizând metode diferite
4. să analizeze veridicitatea unor rezultate obţinute prin calcul
5. să diferenţieze informaţiile dintr-un enunţ matematic după natura lor
6. să prezinte într-o manieră clară, corectă şi concisă, succesiunea etapelor din rezolvarea unor probleme, folosind terminologia şi notaţiile adecvate
7. să discute corectitudinea unui demers matematic, argumentându-şi opiniile
8. să-şi formeze obişnuinţa de a exprima în limbaj matematic anumite probleme practice
9. să manifeste perseverenţa în rezolvarea unei probleme; să propună soluţii sau metode alternative de rezolvare

b) **AFECTIVE**:

1) stimularea curiozităţii şi a imaginaţiei elevilor;

2) dezvoltarea spiritului de observaţie şi a atenţiei concentrate;

3) dezvoltarea simţului critic şi apreciativ;

4) formarea şi dezvoltarea spiritului competitiv.

c) **PSIHOMOTORII**:

1) să utilizeze instrumente geometrice pentru a desena figuri plane descrise în contexte matematice
2) să calculeze lungimi utilizând metode adecvate sau să compare figuri geometrice; să estimeze distanţe în figuri geometrice

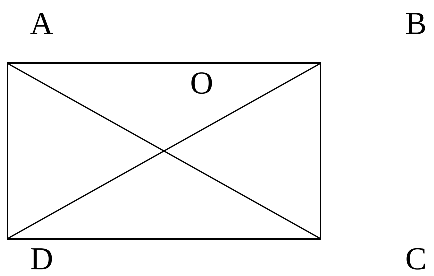
STRATEGII DIDACTICE:

a) **METODE SI MIJLOACE**: conversaţia, explicaţia, exerciţiul, problematizarea
b) **MIJLOACE DE REALIZARE**: fişa de lucru, instrumente geometrice, creioane colorate, markere, retroproiector video, laptop
c) **FORME DE ORGANIZARE**: frontală, individuală

Etapele lecţiei	**Obiective operaţio-nale**	**CONŢINUTURI ŞI SARCINI DE ÎNVĂŢARE**	**STRATEGIA DIDACTICĂ**			
			Metode şi procedee	**Mijloace de realizare**	**Forme de organizare**	**Modalităţi de evaluare**
Moment organizatoric		- salutul - consemnarea absenţelor	conversaţia	catalog	Obiectiv dirijat	
Verificarea temelor		- verificarea temei de casa 1. Daca A,B,C coliniare astfel încât AB=4cm si BC=2,4cm, atunci AC=___cm sau AC=___cm. 2. Se dau punctele O,A,B astfel încât $A \in [OB]$, OA=3cm şi OB=7cm. Să se afle OM, unde M este mijlocul segmentului [AB]	conversaţia	- tabla - marker	frontală	formativă

Realizare a cunoştinţelor	1, 2, 3, 5, 6 A_1 , A_2	Reactualizarea cunoştinţelor se face urmărind un scurt filmuleţ de 3 minute, după care se rezolvă itemi de completare care au acelaşi scop, de a reactualiza noţiunile studiate la unitatea de învăţare<Dreapta> **I**. Completaţi spaţiile libere pentru a obţine propoziţii adevărate: 1. Notaţia A=B exprima”punctele A si B sunt_____” 2. Notaţia d exprima”d este o__________________” 3. Notaţia [AB]exprima”[AB] este un________cu extremităţile_____________________________” 4. Notaţia [AB exprima”[AB este o____________de origine__________________________________” 5. Notaţia AB=CD exprima”dreptele AB si CD sunt____________________________________” 6. Notaţia $A \in d$ exprima”____________________” 7. Notaţia $d \cap g = \{M\}$exprimă”dreptele d si g sunt___________________________________” 8. Notaţia d // g exprimă”____________________” 9. Notaţia $[AB] \equiv [AC]$ exprimă”_______________” 10. Notaţia $A \in \alpha$ exprimă”___________________” 11. Notaţia $d \subset \alpha$ exprimă”___________________” 12. Notaţia [dA exprimă”______________________” **II.** Completaţi spatiile libere pentru a obţine propoziţii adevărate: 1. Prin două puncte diferite se poate duce________ dreapta 2. Trei sau mai multe puncte care aparţin unei drepte se numesc______________ 3. Două drepte din acelaşi plan se numesc paralele dacă nu au______________ 4. Două drepte diferite se numesc concurente dacă au____________________	-vizionare material conversaţia exerciţiului conversaţia	-prezentare Power point fişa de lucru	colectiv dirijat frontală individuală	Formativa formativă

		5. Două segmente se numesc congruente dacă au____________________ 6. Mijlocul unui segment este acel punct al segmentului care îl împarte în__segmente_______	exerciţiu explicaţia			formativa
Desfăşurarea lecţiei	1, 2, 3, 4, 5	1. Desenul alăturat reprezintă un dreptunghi cu diagonalele sale. Stabiliţi dacă următoarele propoziţii sunt adevărate (A) sau false (F): $O \in AC$___ $O \in AB$___ $O \in [DO$___ $B \in [BA$___ $C \in [AO]$___ $C \in AO$___ $D \in [OB$___ $O \in [BD$___ $C \in [AB]$___ A,B,C sunt coliniare_________ A,O,C sunt coliniare_________	Conversaţia Exerciţiul	Fişa de lucru Tabla	Colectiv dirijat	formativa

		Dreptele AO si OC sunt identice__________ Dreptele AD si BC sunt paralele__________ Dreptele AC si BD sunt concurente________ Punctul O este mijlocul segmentului [AB]_____ 	Explicaţia	Markere	Frontala	
	2, 7, 8 P_1 , P_2	2. Se dau A,B,C,D patru puncte coliniare în această ordine, cu segmentele [AB] si [CD] congruente. Ştiind că M este mijlocul lui [AB] şi că lungimea segmentului [AC] este 17cm, iar lungimea segmentului [BC] este 8 cm calculaţi lungimea segmentului [MD]. 3. Pe semidreapta [OX se considera A si B. Notam cu I mijlocul segmentului [AB]. a) daca OA=6cm si OB=10cm , calculaţi lungimea segmentului [OI] b) daca OA=8cm si OI=12cm, calculaţi lungimea segmentului [OB].	Problematizarea	Creioane colorate	individuala	
	2, 7, 8 P_1 , P_2	4. Pe segmentul [AB] cu lungimea de 6cm, construim punctele C si D astfel încât C sa fie mijlocul lui [AD] si D sa fie mijlocul lui [CB]. Calculaţi lungimea segmentului [CD].		Instrumente geometrice		

Evaluare : Se apreciază cu notăelevii care au participat activ la lecţie şi cei care au rezolvat corect exerciţiile

Proiect de lecţie nr.2

TEMA LECTIEI: Înălţimea în triunghi
TIPUL LECŢIEI: Însuşire de noi cunoştinţe şi deprinderi
COMPETENŢE SPECIFICE:

- Recunoaşterea şi descrierea unor elemente de geometrie plană în configuraţii geometrice date
- Utilizarea instrumentelor geometrice (riglă, echer, raportor, compas) pentru a desena figuri geometrice plane descrise în contexte matematice date
- Determinarea şi aplicarea criteriilor de congruenţă ale triunghiurilor dreptunghice
- Exprimarea poziţiei dreptelor în plan (paralelism, perpendicularitate) prin definiţii, notaţii si desen
- Transpunerea unei situaţii-problemă în limbaj geometric, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului

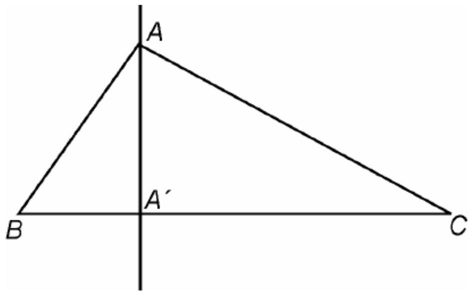
Competenţe derivate:

- Construirea corectă înălţimilor în triunghi
- Definirea înălţimii în triunghi şi a proprietăţilor acesteia.
- Rezolvarea exerciţiilor aplicând noţiunile teoretice învăţate

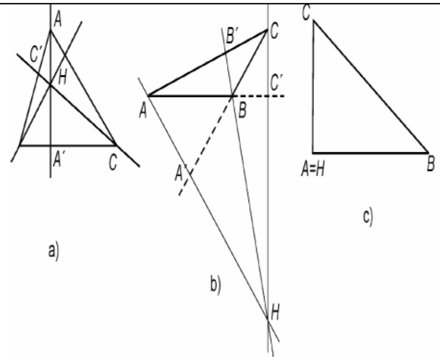
Metode de învăţare : conversaţia, învăţarea prin descoperire, exerciţiul, problematizarea, explicaţia, munca independenta
Mijloace de învăţare : instrumente geometrice, tabla şcolară, cretă, Manual clasa a VI-a, Culegere Mate 2000+
Forme de organizare : frontal, individual.

DESFĂŞURAREA LECŢIEI

Etapele lecţiei	**Ob. Operaţi onale**	**Activitatea propunătoarei**	**Activitate a elevilor**	**Resurse**			**Forme de organiza re**	**Moda lităţi de evalu are**
				Temporale	Material e	Procedural e		
Captarea Atenţiei		Se realizează captarea atenţiei printr-un joc –texul magic-	Elevii care primesc pixul trebuie să spună o noţiune matematic ă învăţată	2 (min.)		Conversaţi a Explicaţia	Frontal	Aprec ieri indivi duale şi colect ive
Reactualizare a cunoștințelor	Oc1 Oa1 Oa2 Om1 Om2	Verificarea și corectarea temei scrise . Verificarea cunoştinţelor asimilate anterior despre bisectoarea unui unghi, mediatoarea unui segment si mediatoarea in triunghi. Triunghiul: să amintim ce este triunghiul, care sunt elementele lui, cum clasificăm triunghiurile, etc. Dacă ştim ce este un triunghi, dacă mai ştim care sunt elementele triunghiului şi cum le clasificăm, atunci putem trece la lecţia nouă:	Elevii numiţi vor spune tema, şi vor răspunde la întrebări legate de noţiunile dobândite anterior	3(min)		Conversaţi a	Frontal Individu al	Obser varea sistem atică

	Om3							
Anunţarea temei şi a obiectivelor		Se anunţă tema şi obiectivele urmărite în cadrul lecţiei. Se scrie pe tablă titlul lecţiei: „Înălţimea in triunghi”.	Copiii ascultă cu atenție ce li se spune.	1(min.)	Caietul elevului	Conversaţia	Frontal	
Dirijarea învăţării	Oc1 Oc2 Oc3 Oc4 Oc5 Oa1 Oa2 Oa3 Om2	Le voi adresa o întrebare cu referire la lecția anterioară: -Cum se numeşte punctul de intersecţie al celor trei mediane? - Ce sunt dreptele perpendiculare? Dar oblice? Ce este distanţa de la un punct la o dreaptă? **Definiţie.** Se numeşte înălţime a unui triunghi o dreaptă care trece printr-un vârf al triunghiului şi este perpendiculară pe latura opusă. De exemplu, înălţimea care trece prin A se numeşte înălţimea din A a triunghiului ABC. Am notat-o cu AA' (aici, A' este intersecţia înălţimii din A cu latura opusă, BC).  	Elevii răspund la întrebare:	30(min)		Conversaţia Explicaţia Exerciţiul Problematizarea	Frontal Individual	Aprecieri individuale şi colective Chestionarea orală

		Aşadar există trei înălţimi AA'. BB', CC' (am notat cu A' un punct oarecare pe înălţimea din A etc.) **Teoremă.** Cele trei înălţimi ale unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de intersecţie se numeşte **ortocentrul triunghiului**. **Atenţie!** Poziţia ortocentrului fată de triunghi depinde esenţial de tipul triunghiului: ascuţitunghic, obtuzunghic sau dreptunghic. În figura a), triunghiul ABC este ascuţitunghic şi ortocentrul H este interior lui ABC. În figura b), triunghiul ABC este obtuzunghic şi ortocentrul H este exterior lui ABC. (am prelungit punctat laturile AB şi BC). În figura c), triunghiul ABC este dreptunghic (în A) şi ortocentrul H coincide cu A. Din aceste motive, de multe ori, pentru ca demonstraţiile să fie complete, trebuie să considerăm separat cazurile când triunghiul este ascuţitunghic, respectiv obtuzunghic, respectiv dreptunghic.						Aprec ieri indivi duale

								
Obținerea performanței	Oc4 Oc5	1. Construiţi înălţimile într-un triunghi a)ascutitunghic ; b) obtuzunghic; c) dreptunghic. 2. În triunghiul MNP [MQ] este înălţime. Construiţi triunghiul MNP daca: a) MQ=3cm, NQ=2cm, QP=4cm; b) MN=4cm, m(<NMP)=100^0 si MQ=3cm; c) NP=8cm, NM=6cm, MQ=5cm; d) MQ=3cm, MN=4cm si MP=5cm. a)În triunghiul ascutitunghic ABC [AA'], [BB'], [CC'] sunt înălţimi iar H este ortocentrul sau. Ştiind că m(<AHB')=50^0 si m(<B'HC)=70^0 aflaţi măsurile unghiurilor triunghiurilor ABC. b)Analizaţi si cazul când triunghiul ABC este obtuzunghic	Elevii rezolvă exercițiile	5(min)	Caiete	Explicaţia Munca independe n-tă Exerciţiul		Probă scrisă

Feed-back-ul Retenția și transferul Evaluarea	Oc4 Om1 Oa3 Om3	Îmi propun să rezolvam probleme din manual Temă pentru acasă:exercițiile de la pagina. Voi face aprecieri cu referire la participarea la lecție a elevilor.	Elevii respectă cerința propunătoarei, și rezolvă problemele. Elevii își notează tema în caiete. Elevii ascultă cu atenție aprecierile.	7(min) 1(min) 1(min)	Fișe de lucru Caiete	Exercițiul Explicația Conversația	Individual Frontal Frontal	Observarea sistematică

Proiect de lecţie nr.3

TEMA LECTIEI: Linii importante în triunghi: concurenţă.

TIPUL LECŢIEI: fixare şi consolidare a cunoştinţelor

COMPETENŢE SPECIFICE:

- Recunoaşterea şi descrierea unor elemente de geometrie plană în configuraţii geometrice date
- Utilizarea instrumentelor geometrice (riglă, echer, raportor, compas) pentru a desena figuri geometrice plane descrise în contexte matematice date
- Determinarea şi aplicarea criteriilor de congruenţă ale triunghiurilor dreptunghice

- Exprimarea poziţiei dreptelor în plan (paralelism, perpendicularitate) prin definiţii, notaţii si desen
- Transpunerea unei situaţii-problemă în limbaj geometric, rezolvarea problemei obţinute şi interpretarea rezultatului

Competenţe derivate:

- Construirea corectă liniilor importante în triunghi
- Definirea liniilor importante în triunghi şi a proprietăţilor acestora.
- Rezolvarea problemelor aplicând noţiunile teoretice învăţate

Metode de învăţare : conversaţia, învăţarea prin descoperire, exerciţiul, problematizarea, explicaţia, munca independentă

Mijloace de învăţare : instrumente geometrice, tabla şcolară, cretă, Manual clasa a VI-a, Culegere Mate 2000+

Forme de organizare : frontal, individual.

DESFĂŞURAREA LECŢIEI

Nr. Crt.	Momentul lecţiei	Activitatea profesorului	Activitatea elevilor
1.	Organizarea clasei pentru lecţie	-verificarea prezenţei -verificarea temei	Prezintă caietul de teme
2.	Captarea atenţiei şi trezirea interesului pentru lecţie	Anunţă titlul lecţiei, scopul şi obiectivele urmărite, scrie titlul pe tablă.	Scrie titlul lecţiei.
3.	Reactualizarea cunoştinţelor anterioare necesare pentru rezolvarea problemei P_1.	Cere elevilor să răspundă la următoarele întrebări:	Elevii nominalizaţi răspund la întrebări. Desenează un triunghi ABC şi pun în evidenţă centrul de greutate al triunghiului.

		1.Care sunt liniile importante în triunghi? 2. Cum definim mediana unui triunghi? 3. Cum se numeşte punctul de intersecţie al medianei unui triunghi? 4. Ce proprietate are centrul de greutate al unui triunghi?	
4.	Fixarea cunoştinţelor prin rezolvarea problemei P_1.	Propune spre rezolvare problema: P_1.Să se construiască un triunghi cunoscând lungimile medianelor sale. Dirijează învăţarea.	Scriu enunţul problemei Fac analiza problemei pe desenul din caiet. Analiza: Presupunem problema rezolvată: fie ABC triunghiul căutat cu $AA'=m_a$, $BB'=m_b$, $CC'=m_c$. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului. Dacă D este simetricul punctului G faţă de A′, atunci B, G şi D sunt necoliniare şi $BG=\frac{2}{3}m_b$, $GD=\frac{2}{3}m_a$, $BD=\frac{2}{3}m_c$ (fig.1. anexã) Construcţia

		Ajută elevii care întâmpină dificultăţi.	C_1. Construieşte triunghiul DBG cu BG=$\frac{2}{3}m_b$, GD=$\frac{2}{3}m_a$, BD=$\frac{2}{3}m_c$. C_2. Construieşte mijlocul A′ al segmentului [GD] C_3. Construieşte simetricul C al punctului B faţă de A′. C_4. Pe semidreapta (GA′ construieşte punctul A astfel încât [GA]≡[GD]. Punctele A, B, C sunt vârfurile triunghiului căutat. Demonstraţie: În ΔABC [AA′]-mediană, G∈AA′, GA=2GA′⇒G este centrul de greutate al triunghiului. BG∩AC={B′}; CG∩AB={C′}⇒[BB′] şi [CC′] sunt mediane. Cum BG=$\frac{2}{3}m_b \Rightarrow$ BB′=m_b. BGCD fiind paralelogram (din construcţie) ⇒GC= BD=$\frac{2}{3}m_c$ ⇒CC′= m_c. Discuţie Construcţia triunghiului ABC este condiţionată de existenţa triunghiului BGA′. Triunghiul BGA′ există dacă şi numai dacă m_a, m_b, m_c pot fi lungimile laturilor unui triunghi, adică $\lvert m_b - m_c\rvert < m_a < m_b + m_c$.

		Face următoarea observaţie: Pentru orice triunghi ABC există un triunghi având laturile cât medianele triunghiului.	Scriu observaţia în caiete.
5.	Reactualizarea cunoştinţelor necesare rezolvării problemei P_2.	Cere elevilor să definească bisectoarea unui unghi, înălţimea unui triunghi.	Elevii nominalizaţi răspund la întrebări.
6.	Fixarea cunoştinţelor prin rezolvarea problemei P_2.	Propune spre rezolvare problema P_2. Să se construiască triunghiul ABC cunoscând lungimile înălţimii, medianei şi bisectoarei din vârful A. Dirijează învăţarea. Ajută elevii care întâmpină dificultăţi.	Scriu enunţul problemei. Analiza: Notează h-lungimea înălţimii; m-lungimea medianei; l-lungimea bisectoarei. Fie ΔABC triunghiul căutat, $AD \perp BC$, $AD=h$, $E \in (BC)$, $AE=l$. O condiţie necesară (dar nu şi suficientă) pentru ca ΔABC să existe este $h \leq l$ şi $h \leq m$. Pentru $h < l$ şi $h < m$ se pot construi ΔADE şi ΔADM. Fie $C(O, R)$-cercul circumscris triunghiului ABC şi $(AE \cap C(O, R)=\{A'\}$. Construcţia C_1. Pe o dreaptă oarecare d se consideră un punct D. C_2. Construieşte dreapta $AD \perp d$ astfel încât $AD=h$.

			C_3. Construieşte cercurile C(A, l) şi C(A, m). Notează d$\cap$ C(A, l)={E} şi (DE$\cap$ C(A, m)={M}. C_4. Construieşte MA′$\perp$d unde A′$\in$(AE) C_5. Construieşte mediatoarea segmentului AA′ care intersectează MA′ în O. C_6. Construieşte cercul C(O, OA) care intersectează dreapta d în punctele B şi C. Punctele A, B, C sunt vârfurile triunghiului căutat. (Fig.2. anexã) Demonstraţie Din construcţie rezultă că A, B, C sun necoliniare. M este mijlocul segmentului [BC], A′$\in$BC; BA′$\equiv$CA′$\Rightarrow$[AM]-mediană, (AE-bisectoare şi AD-înălţime; AM=m, AE=l şi AD=h. Discuţie
		Ajută elevii în a discuta soluţia problemei.	În ipoteza h< l şi h< m punctele E şi M există. Pentru ca ΔABC să existe este necesar ca C(O,OA) $\cap$d$\neq\emptyset$ ceea ce revine la OM<OA=OA′, ceea ce este echivalent cu E$\in$(DM). Această condiţie este îndeplinită dacă h< l< m. Soluţia este unică până la renotarea punctelor B, C, înlocuirea triunghiului ABC cu simetricul său faţă de AD sau faţă de dreapta d şi până la o „deplasare” a triunghiului ABC (determinată de alegerea arbitrară a dreptei d şi a punctului D$\in$d).

			Dacă h=l sau h=m atunci h=l=m şi ΔABC este isoscel cu [AB]≡[AC] iar problema admite o infinitate de soluţii.
7.	Reactualizarea cunoştinţelor necesare rezolvării problemei P_3.	Cere elevilor să definească linia mijlocie în triunghi, să enunţe teorema la linia mijlocie în triunghi. Desenează pe tablă triunghiul ABC, cu $M\in BC$, $N\in AB$, $P\in AC$ şi cere elevilor să scrie teorema lui Menelaus pentru ΔABC şi transversala MNP.	Elevii nominalizaţi răspund la întrebările adresate. Realizează desenul în caiete şi scriu relaţia: (Fig.3.) $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{MB}{MC}\cdot\frac{PC}{PA}=1$
8.	Fixarea cunoştinţelor prin rezolvarea problemei P_3.	Propune spre rezolvare problema P_3. Triunghiului ABC i se prelungesc laturile [BC], [CA] şi [AB] cu segmentele [B′C]≡[BC], [AC′]≡[AC] şi [A′B]≡[AB]. Se obţine un triunghi A′B′C′. Dacă ştergem cu radiera triunghiul iniţial, rămâne numai triunghiul A′B′C′. Construiţi din nou triunghiul ABC. (Olimpiada de matematică- R.F.G. 1977).	Scriu enunţul problemei. Analiza Presupunem problema rezolvată. Fie $AB\cap B'C'=\{M\}$, $BC\cap A'C'=\{N\}$, $AC\cap A'B'=\{P\}$ şi $CR\parallel AB$, $AT\parallel BC$, $BS\parallel AC$ unde $R\in B'C'$, $T\in A'C'$ şi $S\in A'B'$. (Fig.4. anexã) În $\Delta C'CR$ [AM]-linie mijlocie⇒[C′M]≡[MR] În $\Delta B'BM$ [CR]-linie mijlocie⇒[MR]≡[RB′]⇒$C'M=\frac{1}{3}C'B'$ În $\Delta C'CN$ [AT]-linie mijlocie⇒[C′T]≡[TN]

			În $\Delta A'AT$ [BN]-linie mijlocie$\Rightarrow$[TN]$\equiv$[A′N]$\Rightarrow$A′N=$\frac{1}{3}$A′C′ În $\Delta B'BS$ [CP]-linie mijlocie$\Rightarrow$[B′P]$\equiv$[PS] În $\Delta A'AP$ [BS]-linie mijlocie$\Rightarrow$[PS]$\equiv$[A′S]$\Rightarrow$B′P=$\frac{1}{3}$A′B′ Construcţia Pe laturile [B′C′], [C′A′], [A′B′] ale triunghiului A′B′C′ se construiesc respectiv punctele M, N, P astfel încât C′M=$\frac{1}{3}$C′B′; A′N=$\frac{1}{3}$A′C′; B′P=$\frac{1}{3}$A′B′ (pentru aceasta se împarte fiecare latură în trei segmente congruente).
		Dirijează învăţarea. Ajută elevii care întâmpină dificultăţi.	Notăm A′M$\cap$C′P={A}; B′N$\cap$A′M={B}; B′N$\cap$C′P={C}. Punctele A, B, C sunt vârfurile triunghiului căutat ABC. Demonstraţie În $\Delta B'C'N$ pentru transversala A′BM rezultă (T. Menelaus) $\frac{BB'}{BN}\cdot\frac{A'N}{A'C'}\cdot\frac{MC'}{MB'}=1\Rightarrow\frac{BB'}{BN}=\frac{A'C'}{A'N}\cdot\frac{MB'}{MC'}=3\cdot 2=6$ (1) În $\Delta A'B'N$ pentru transversala C′CP rezultă (T. Menelaus) $\frac{CN}{CB'}\cdot\frac{PB'}{PA'}\cdot\frac{C'A'}{C'N}=1\Rightarrow\frac{CN}{CB'}=\frac{PA'}{PB'}\cdot\frac{C'N}{C'A'}=2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ (2)

			Din (1) şi (2) rezultă $CB'=\frac{3}{4}\cdot CN=\frac{3}{4}(BC+BN)=\frac{3}{4}BC+\frac{3}{4}BN=\frac{3}{4}BC+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}BB'=\frac{3}{4}BC$ $+\frac{1}{8}(BC+CB')=\frac{7}{8}BC+\frac{1}{8}CB'\Rightarrow BC=CB'$ Analog se demonstrează AC=AC′ şi AB=BA′. Discuţie Punctele A, B, C sunt unic determinate, deci soluţia este unică.
9.	Evaluarea rezultatelor.	Se fac aprecieri verbale asupra modului de participare la lecţie, iar unde este cazul se face notare.	
10.	Asigurarea transferului de cunoştinţe.	Propune tema: P4. Să se construiască un triunghi unoscând lungimile a două laturi şi lungimea bisectoarei unghiului format de ele. P5. Să se construiască triunghiul ABC ştiind că lungimea laturi BC=a, a înălţimii AD=h (D∈BC) şi a medianei BE=m (E∈(AC)).	Notează tema în caiete.

		Discuţie.	

Fig.1.

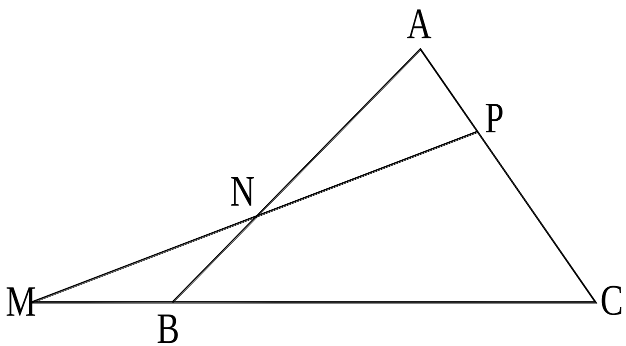
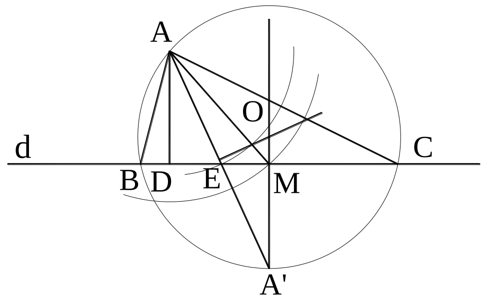


Fig.2.



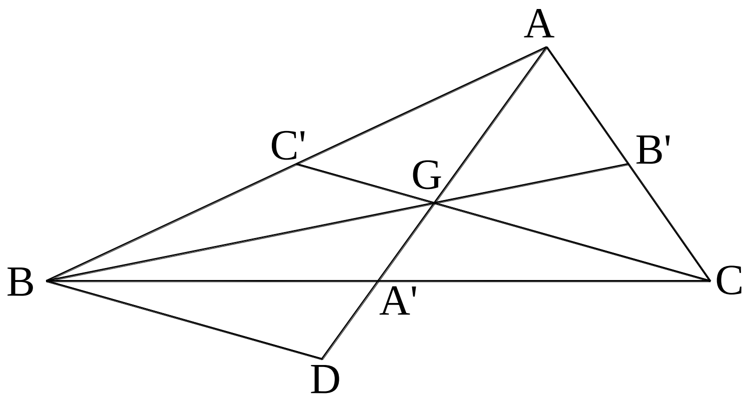


Fig.3

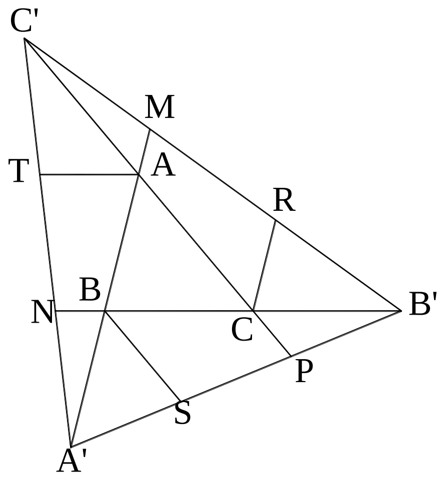


Fig. 4

V.2. MODALITĂŢI DE EVALUARE

V.2.1 Evaluare – definirea conceptului, tipuri de evaluare

Evaluarea este un proces didactic complex, integrat întregului proces de învăţământ, care urmăreşte măsurarea cantităţii cunoştinţelor, priceperilor, capacităţilor dobândite de elevi, ca şi valoarea, nivelul, performanţele şi eficienţa activităţii de perfecţionare a activităţii instructiv-educative. A evalua rezultatele şcolare înseamnă a determina măsura în care obiectivele programului de instruire au fost atinse, precum şi eficienţa metodelor de predare-învăţare.

Principalele operaţii ale evaluării sunt: verificarea, măsurarea, aprecierea şi decizia.

Forme şi tipuri de evaluare

După modul de integrare a verificării şi evaluării în procesul de învăţământ distingem trei forme de evaluare mai importante:

a) *Evaluarea iniţială*

Un specialist în domeniu (R. Ausubel), referindu-se la importanţa acestei forme de evaluare, preciza că „**ceea ce influenţează cel mai mult învăţarea sunt cunoştinţele pe care elevul le posedă la plecare. Asiguraţi-vă de ceea ce el ştie şi instruiţi-l în consecinţă”.** Performanţele viitoare ale elevilor depind şi de cunoştinţele anterioare, element pe baza căruia va trebui să alcătuim programul de instruire. În acest scop, probele iniţiale de evaluare orale, scrise sau practice sunt de un real folos.

b) *Evaluarea sumativă (cumulativă)*

Este evaluarea tradiţională, efectuată de cadrele didactice periodic, prin verificări de sondaj şi globale, la încheierea unui semestru sau an şcolar. Întrucât nu este o evaluare ritmică, notele nu reflectă, de multe ori, adevăratul nivel de performanţe al elevilor şi ca urmare nu are un caracter stimulativ şi nu oferă suficiente date asupra programului de instruire, se va folosi limitat şi combinată cu evaluarea continuă a tuturor elevilor.

c) *Evaluarea continuă (formativă)*

Se desfăşoară pe tot parcursul programului de instruire în cadrul lecţiilor şi la încheierea unui capitol, acoperind întregul conţinut, conform programei. Elevii, fiind verificaţi din toată materia şi obţinând permanent informaţii cu privire la eficienţa programului de instruire, profesorul poate să întreprindă la timp măsurile necesare prevenirii unor insuccese şcolare şi să perfecţioneze metodele de predare-învăţare. Acest tip de evaluare ritmică, pe baza unui feed-back continuu, care generează relaţii de cooperare între profesor şi elevi, oferă elevilor informaţii cu privire la eficienţa metodelor de învăţare folosite şi creează posibilitatea ameliorării continue a procesului de învăţământ.

Este recomandat să îmbinăm cele trei forme de evaluare, folosind cu precădere evaluarea formativă, care permite dezvăluirea cauzelor eşecului şcolar, are un caracter predictiv şi vizează dezvoltarea capacităţilor intelectuale.

V.2.2 Metode de verificare şi evaluare

Metodele de evaluare se referă la căile, modalităţile alese pentru evaluare. Fiecare metodă de evaluare dispune de procedee variate de realizare. Termenul generic de metode şi tehnici de evaluare cuprinde:

- metode utilizate în verificarea propriu-zisă;
- metode folosite în măsurare-notare;
- metode utilizate în interpretare- apreciere;

- metode care declanşează autoevaluarea la elevi.

În cadrul metodelor de evaluare propriu-zisă distingem:

1) metode clasice de evaluare:
   - probe orale;
   - probe scrise;
   - probe practice.
2) metode /tehnici de evaluare:
   - testul;
   - chestionarul.
3) metode auxiliare:
   - observaţia, dezbateri, convorbiri, autoevaluări ale elevilor.
4) metode moderne, alternative de evaluare:
   - alcătuirea unor portofolii;
   - susţinerea de referate, proiecte, comunicări;
   - realizarea unor eseuri;
   - rezolvarea unor sarcini în grup;
   - verificarea asistată de calculator.

Probele scrise

Verificarea prin probe scrise constă în construirea unor întrebări şi sarcini care să fie rezolvate în scris de către elevi, într-un timp dat.

Lucrările scrise se utilizează în mai multe situaţii, ca: probe scurte de evaluare, sub forma extemporalelor şi probe de evaluare periodică ca probe de bilanţ.

Este foarte important ca probele scrise să fie elaborate riguros prin stabilirea obiectivelor evaluării, a conţinuturilor, itemilor, grilelor de corectare şi punctajelor acordate.

Probele practice

Sunt utilizate în cadrul unor discipline practic-aplicative care verifică atât cunoştinţe, cât şi deprinderi şi calitatea lucrărilor executate de elevi. Profesorul/învăţătorul trebuie să explice mai întâi sau să demonstreze cum trebuie realizate lucrările respective, iar în timpul evaluării urmăreşte aceste cerinţe. Lucrările practice pot fi realizate individual sau în micrgrupuri, această modalitate de evaluare având un pronunţat caracter formativ-educativ pentru elevi.

Chestionarea sau examinarea orală

Numită frecvent şi ascultarea elevilor, această metodă constituie o formă particulară a conversaţiei prin care se verifică gradul de însuşire a cunoştinţelor şi deprinderilor, priceperea de a interpreta şi prelucra datele, stăpânirea operativă a materialului în cadrul aplicaţiilor practice.

Profesorul alternează în chestionarea orală întrebări de bază cu întrebări ajutătoare, subordonate celor dintâi. Perceptele învăţate nu se transpun însă de la început în practică, ele se „redescoperă” uneori prin experienţă proprie. Chestionarea orală este frecvent folosită de profesori şi are avantajul că favorizează dialogul, elevul având posibilitatea să-şi justifice răspunsul, să participe la confruntarea de idei şi opinii în cadrul clasei. În acelaşi timp, profesorul, prin feed-back, poate corecta sau completa răspunsul elevului, ajutându-l să-şi dea seama cât ştie şi cum a învăţat, direcţionându-i, dacă este cazul, expunerea.

Cu toate aceste avantaje, chestionarea orală are şi numeroase limite: întrebările nu pot avea acelaşi grad de dificultate, unii elevi sunt mai emotivi şi „ se blochează”, mai ales atunci când sunt ironizaţi de profesor sau de colegii lor, timpul nu permite o verificare completă privind conţinutul predat. Comportamentul profesorului manifestat prin nerăbdare, indulgenţă sau exigenţă exagerată, poate determina caracterul subiectiv al notării.

Observaţia curentă

În activitatea de fiecare zi la clasă, în contextul muncii de predare şi de contacte cu elevii, profesorul sesizează contribuţiile spontane ale copiilor, modul cum îşi realizează tema de acasă, calitatea prestaţiilor în munca independentă şi la fixarea cunoştinţelor, manifestări de neatenţie, dificultăţi şi greşeli semnificative. Asemenea constatări făcute de profesor „din mers” le încredinţează memoriei sale; ele contribuie la schiţarea unei imagini asupra unui elev sau altul. Materialul formativ este cel cuprins în programe.

Într-o anchetă întreprinsă în rândul cadrelor didactice pe tema „Cum vă daţi seama de rezultatul unei lecţii, de reuşita ei?”, se relevă ca indici de reuşită a activităţilor la clasă:

(1) prestaţia elevilor în „momentele de vârf” ale lecţiei;

(2) gradul de participare spontană la ore;

(3) reuşita momentelor de fixare şi de muncă independentă;

(4) calitatea şi volumul aplicaţiilor propuse;

(5) participarea mai multor elevi la fixarea cunoştinţelor, inclusiv a celor slabi;

(6) răspunsuri bune şi foarte bune la verificarea cunoştinţelor.

În general, observaţia are un caracter informal (se integrează firesc în activitatea de cunoaştere a elevilor) şi este însoţită de aprecieri propoziţionale în cazul unei evaluări continue a elevilor.

Portofoliul

Portofoliul este o colecţie formată din produse ale activităţii de învăţare a elevului. Produsele incluse sunt selectate de elevul însuşi şi sunt însoţite de reflecţiile sale personale asupra lor, astfel încât să contureze cât mai bine performanţa sa prezentă în domeniul care face obiectul de studiu al portofoliului. Elementul esenţial al acestei metode este implicarea activă a elevului în crearea, colectarea şi selectarea produselor care satisfac scopul portofoliului. Acest fapt conferă portofoliului o importantă valoare instructivă, pe lângă valenţa sa evaluativă. Elevii învaţă despre ei înşişi în procesul întocmirii portofoliului şi a reflectării asupra produselor propriei învăţări.

Nu este uşor de implementat un sistem de evaluare pe bază de portofoliu şi nici nu se potriveşte la toate clasele. Scopul pentru realizarea unor portofolii poate fi: pentru a demonstra procesul de dezvoltare al unei competenţe de-a lungul timpului, a crea o colecţie de produse personale importante, a furniza informaţii pentru evaluarea întregii clase, a realiza o colecţie cu produse care să demonstreze pregătirea pentru trecerea la un nivel de învăţare superior.

Pentru clasele primare, unde se introduce ideea portofoliului, forma cea mai potrivită o îmbracă cele de celebrare.

O metodă modernă de evaluare, dar încă puţin utilizată este verificarea asistată de calculator. Spre deosebire de metodele de evaluare tradiţionale, evaluarea cu ajutorul calculatorului reduce subiectivismul şi emoţiile care-i însoţesc pe elevi în mod obişnuit în evaluare. Se economiseşte timpul şi efortul evaluatorului care pot fi utilizate şi în domenii. Testarea asistată de calculator, dar şi alte tipuri de probe pot fi realizate chiar de către elev, prin autoevaluare, cu efecte reglatorii asupra învăţării.

Metodele de evaluare sunt eficiente dacă se aplică în combinaţie unele cu altele şi dacă sunt corect elaborate, aplicate şi interpretate de către evaluator – în funcţie de disciplinele de învăţământ, dar şi de nivelul de dezvoltare psihosocială a celor evaluaţi.

Prin predarea geometriei plane în şcoala gimnazială şi la liceu, se urmăreşte ca elevii să-şi însuşească un număr de cunoştinţe matematice, îndeosebi cele din programa şcolară.

Este necesar ca predarea geometriei să se facă astfel încât în liceu studiul ei să se poată baza pe cunoştinţele acumulate în şcoala gimnazială. Este absolut necesară realizarea unor punţi de legătură între ciclurile şcolare astfel ca predarea să nu ignore ceea ce elevii au învăţat anterior.

În geometria elementară, rezolvarea problemelor de coliniaritate a unor puncte sau de concurenţă a unor drepte, continuă să reprezinte o prioritate în procesul rezolvării unor probleme de larg interes aplicativ, folosind metode şi raţionamente matematice.

Problemele de coliniaritate se studiază începând cu clasa a VI-a folosind metoda raţionamentului geometric, atunci când pentru a demonstra că trei puncte sunt coliniare se foloseşte axioma paralelelor.

Cu ajutorul noţiunilor de matematică dobândite în clasa a VI-a, elevul în clasa a VII-a poate rezolva probleme de coliniaritate cu ajutorul criteriului referitor la „unghiuri opuse la vârf” sau cu ajutorul criteriului referitor la „unghiul alungit”.

Tot la nivel de clasa a VII-a elevul poate rezolva probleme de concurenţă a unor drepte , folosind „proprietăţile liniilor importante într-un triunghi”, criteriu care se bazează pe faptul că trebuie să găsim un triunghi în funcţie de datele problemei în care dreptele respective să fie mediane, bisectoare, înălţimi sau mediatoare.

Programa şcolară actuală nu cuprinde studiul teoremelor referitoare la problemele de coliniaritate şi concurenţă (teorema lui Menelaus şi teorema lui Ceva), însă în cadrul claselor cu un nivel ridicat de cunoştinţe, ele se pot studia în cadrul unui opţional studiat la decizia şcolii. Problemele de coliniaritate şi concurenţă pot fi uşor rezolvate folosind metoda raţionamentului geometric şi nu numai.

La clasele de liceu, aceste probleme de coliniaritate şi concurenţă sunt tratate începând cu clasa a IX-a, în cadrul capitolului „Vectori”, unde problemele pot fi „elegant” rezolvate utilizând „metoda vectorială”.

În ceea ce priveşte rezolvarea problemelor de coliniaritate şi concurenţă utilizând „metoda vectorială” trebuie să precizăm două aspecte importante:

- dacă enunţul conţine vectori, atunci rezolvarea se va face utilizând obligatoriu metoda vectorială.
- dacă enunţul nu conţine vectori, atunci soluţia vectorială poate oferi o alternativă de rezolvare a problemei.

V.2.3. Modele de teste

Test nr. 1

Clasa a VI – a

Obiective operaționale:

Aplicarea noţiunilor învăţate în rezolvarea problemelor de coliniaritate (poziţii relative ale unui punct faţă de o dreaptă: puncte coliniare, proprietăţile punctelor de pe mediatoarea unui segment, suma măsurilor unghiurilor unui triunghi)

Timp de lucru: 50 minute

Subiecte:

1. Fie punctele A, B, C astfel încât AB=3,5cm, BC= 10cm și AC=6,5cm. Demonstraţi că punctele A, B, C sunt coliniare.

2. Fie segmentul [AB] și punctele M, N, P distincte, ce nu aparţin dreptei AB. Ştiind că [MA] ≡ [MB], $N\hat{A}B \equiv N\hat{B}A$ și P aparţine mediatoarei segmentului AB, să se demonstreze coliniaritatea punctelor M, N și P.

3. Pe laturile consecutive AB și BC ale pătratului ABCD, se construiesc triunghiurile echilaterale AMB și BNC, primul interior și al doilea exterior pătratului. Să se demonstreze că punctele D, M, N sunt coliniare.

Barem de corectare:
1. 2 p
2. 3 p
3. 4 p

   1 p din oficiu

Test nr.2

Clasa a VI-a

Obiective operaţionale:

1. Aplicarea noţiunilor învăţate în rezolvarea problemelor de coliniaritate și concurență
2. Deducerea unor rezultate și verificarea acestora utilizând noțiunile învățate.

Timp de lucru: 50 minute

Subiecte:

1) Desenează punctele A, B, C, D astfel încât $AB \parallel CD$ și $AB \perp BC$.

2) Dacă punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, astfel încât AC = 12 cm și

AB = $2 \cdot$ BC, calculează lungimile segmentelor [AB] și [BC].

3) Dacă O, A, B, C sunt puncte coliniare, în această ordine, calculează:

a) $(OA \cap (CB$;   b) $[OB] \cap [AC]$.

4) Fie A, B, C, D puncte coliniare, în această ordine, astfel încât C = $s_B A$ și D = $s_C B$.

Arătați că $[AB] \equiv [CD]$.

5) Fie A, B, C, puncte coliniare, în această ordine, M mijlocul segmentului [AB] și N mijlocul segmentului [BC]. Știind că MN = 6 cm, calculați lungimea segmentului [AC].

6) Dacă $B \in (AC)$, AB = 2x + 1, AC = 3x + 5 și BC = 8 cm, aflați lungimile

segmentelor [AB] și [AC].

Barem de corectare:

1. 1 p
2. 1,5 p
3. 1,5 p
4. 1 p
5. 2 p
6. 2 p

   1p din oficiu

Test nr. 3

Clasa a VII – a

Obiective operaționale:

3. Aplicarea noţiunilor învăţate în rezolvarea problemelor de coliniaritate și concurență
4. Deducerea unor rezultate și verificarea acestora utilizând noțiunile învățate.

Timp de lucru: 50 minute

Subiecte:

Bifați cu x în căsuța corespunzătoare răspunsului pe care îl considerați corect:

1. Oricare trei puncte din plan sunt coliniare.
2. Fie ΔABC, dreptele AM, BN, CP sunt concurente, unde M∈(BC), N∈(AC), P∈(AB) şi AB=BC=30 cm, AP=PB, CM=12 cm, CN=20 cm, atunci AC=50 cm.
3. Bisectoarele unui triunghi sunt concurente.
4. Fie trapezul ABCD cu bazele AB şi CD, construim în exterior triunghiurile echilaterale ABE şi CDF. Atunci dreptele AC, BD, EF sunt concurente.
5. Într-un triunghi ortocentrul, centrul de greutate şi centrul cercului înscris triunghiului sunt coliniare.
6. Teorema lui Ceva este utilizată în demonstrarea coliniarităţii unor puncte în triunghi.
7. Într-un patrulater inscriptibil ABCD cu AD=AB+CD, bisectoarele unghiurilor B şi C sunt concurente cu AD.
8. Înălţimile unui triunghi nu sunt concurente.
9. Dacă AB= 15 cm, AC=7 cm şi BC=8 cm, atunci punctele A, B, C nu sunt coliniare.
10. Într-un triunghi dreptele determinate de vârfurile triunghiului şi punctele de contact ale cercului înscris cu laturile opuse sunt concurente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DA										
NU										

Barem de corectare;

1; 9 – 0,5p

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 – 1p;

1p din oficiu

CONCLUZII

Prin realizarea acestei lucrări am încercat să aduc o mică contribuţie în găsirea unor căi pentru a-i ajuta pe elevi să iubească această ştiinţă exactă şi anume matematica.

Interesul pentru această temă este motivat de existenţa unui număr mare de propoziţii matematice foarte elegante, care concluzionează proprietăţile de concurenţă şi coliniaritate, în ipoteze, fie foarte generale, fie foarte speciale. Problemele de coliniaritate şi concurenţă reprezintă adevăruri în general uşor de intuit, dar a căror demonstrare solicită rigurozitate şi inventivitate.

În predarea geometriei, o atenţie deosebită trebuie să se dea şi simbolurilor, notaţiilor, convenţiilor de desen, de reprezentare, de redactare simbolică a unui raţionament.

În însuşirea temeinică a cunoştinţelor de geometrie, un loc însemnat îl ocupă şi rezolvările de probleme de coliniaritate şi concurenţă. Ele constituie antrenamentul necesar însuşirii disciplinei în gândire, a spiritului de rigoare necesar astăzi pe o scară din ce în ce mai largă în viaţa de toate zilele.

Remarc, de asemenea că, în ultimii ani, tot mai multe probleme de concurenţă şi coliniaritate se propun la concursurile şcolare. Aparent proprietăţi separate, coliniaritatea şi concurenţa sunt de fapt complementare, într-o relaţie directă mai mult decât formală, ele determinându-se reciproc în exprimarea dualismului armonic sau a dualismului polar.

Am înţeles că nu există reţete rigide pentru a-i ajuta pe elevi să-şi însuşească cunoştinţele, dar există întotdeauna o manieră mai atractivă, care poate să-i implice activ pe elevi, care să le ofere posibilitatea expunerii unor idei cât mai variate, a unei viziuni pluri şi transdisciplinare integratoare, pregătindu-i pentru rezolvarea unor situaţii problematice în viaţa de zi cu zi.

Desigur, nu se poate epuiza sfera problemelor de coliniaritate şi concurenţă, însă în cadrul lucrării s-a încercat cuprinderea celor mai interesante rezultate din acest domeniu.

Pentru sprijinul şi recomandările primite în realizarea acestei lucrări, aduc mulţumirile mele doamnei conf. univ. dr. Chiorean Ioana.

BIBLIOGRAFIE

1. **Bălăucă, A.,** Algebră. Geometrie, 888 de probleme semnificative, Olimpiade şi concursuri, Editura Taida Iaşi, 2002.
2. **Bîrchi, I., D., Albu, I.,** Geometrie vectorială în liceu, Editura Bîrchi, Timişoara.
3. **Botez, M. Şt.,** Probleme de geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976.
4. **Bordinc, D. R.,** Metodica rezolvării problemelor de coliniaritate şi concurenţă, Timişoara, 2013.
5. **Brânzei, D., Aniţa, S.,** Bazele raţionamentului geometric, Editura Academiei Române, Bucureşti 1983.
6. **Brânzei, D.,** Planul şi spaţiul euclidian, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1986.
7. **Cindrea, I. A.,** Matematica de drag, Compania, 2003.
8. **Craioveanu, M., Albu, I. D.,** Geometrie afină şi euclidiană, Editura Facla, Timişoara, 1982.
9. **Drăghicescu, I. C, Masgras, V.,** Probleme de geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
10. **Ganga, M.,** Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică, Editura Mathpress, 2005.
11. **Ionescu, M., Radu, I.,** Didactica modernă, Colecţia Didactică Dacia, 2001.
12. **Joiţa, E., Vlad, M.,** Pedagogie şi elemente de psihologie şcolară, Editura Arves.
13. **Lupu, C., Săvulescu, D.,** Metodica predării geometriei, Editura Paralela 45, 2000.
14. **Marica, O.,** Metode de rezolvare a problemelor de coliniaritate şi concurenţă, Editura Libris.
15. **Moise, E., Downs, F.,** Geometrie, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
16. **Nicolescu, L., Boskoff, V.,** Probleme practice de geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.
17. **Pop, V.,** Geometrie pentru gimnaziu, liceu şi concursuri, Editura Mediamira, Cluj- Napoca, 2007.
18. **Panaitopol, M., E.,** Probleme calificative de geometrie plană, Editura Gil, Zalău, 1996.
19. **Schneider, G.A.,** Culegere de probleme de geometrie pentru clasele V-VIII, Editura Hyperion, Craiova, 1993.
20. **Stoica, M.,** Pedagogie şi psihologie, Editura Gheorghe Alexandru, 2007.
21. **Szucs, A.,** Coliniaritate şi concurenţă în plan, Timişoara, 2013.
22. **Ţiţeica, G.,** Probleme de geometrie, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.

ISBN 978-630-6502-80-6
Editura Meritocrat Cluj-Napoca
meritocratcj@gmail.com